Decomposição de Ideais em Ideais Primários

Objetivo: Usar informação sobre o R-módulo $R/\mathfrak{a}$ para estudar o ideal $\mathfrak{a}$.

Def: Um ideal $\mathfrak{q} \subset R$ diz-se primário se

$$\forall_{x,y} \quad xy \in \mathfrak{q} \Rightarrow x \in \mathfrak{q} \vee \exists n : y^n \in \mathfrak{q}$$

De forma equivalente, $\mathfrak{a}$ é primário sse os divisores de zero $R/\mathfrak{a}$ são nilpotentes

<u>Exemplos</u>: 1. $\mathfrak{q} = \langle p^n \rangle \subset \mathbb{Z}$

é primário.

2. $\mathfrak{p} \subset R$ primo $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}$ primário.

3. $\mathfrak{p} \subset R$ primo principal $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}^n$ é primário.

4. $R = k[X,Y]$, $\mathfrak{a} = \langle X^2, XY \rangle$

não $\mathfrak{a}$ é primário: $XY \in \mathfrak{a}$ mas $X \notin \mathfrak{a}$
e $\forall n \; Y^n \notin \mathfrak{a}$

<u>NB</u>: Nestes exemplos, temos

1. $\sqrt{\mathfrak{q}} = \langle p \rangle$
2. $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$
3. $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$

$\pi : k[X,Y] \to k[X,Y]/\mathfrak{a}$

$\pi(Y)$ é divisor de zero mas não é nilpotente

4. $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\langle x^2, xy \rangle}$

$$V(\mathfrak{a}) \subset k^2$$

$$\| $$

$$\{(x,y) \in k^2 \mid x = 0\}$$

$$I(V(\mathfrak{a})) = \{f \in k[X,Y] \mid f(x,y) = 0 \ \forall (x,y) \in V(\mathfrak{a})\}$$

$$= \sqrt{\mathfrak{a}}$$

$$I(V(\mathfrak{a})) = I(V(\langle x \rangle))$$

$$= \langle x \rangle.$$

<u>Def</u>: Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, um ideal primário $\mathfrak{q} \subset R$ diz-se $\mathfrak{p}$-primário se

$$\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}.$$

<u>NB</u>: Se $\mathfrak{q}$ é $\mathfrak{p}$-primário e $\mathfrak{q}$ é f.g. então $\exists n$: $\underline{\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}}$ (exercício).

Será que $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}$-primário

Resposta: Não: $\mathfrak{a} = \langle x^2, xy \rangle$

$\mathfrak{p} = \langle x \rangle$

$$\mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$$

mas não $\mathfrak{a}$ não é primário.

Lema: Se $\mathfrak{q} \subset R$ é um ideal tq. $\mathfrak{m} := \sqrt{\mathfrak{q}}$ é maximal, então $\mathfrak{q}$ é $\mathfrak{m}$-primário.

Dem: A provar: $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ maximal

$$\Rightarrow \forall_{\substack{\mathfrak{m}' \\ \text{maximal}}} \quad \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}' \Rightarrow \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$$

pois $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{q})} \mathfrak{p}$

logo $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p} \quad \forall \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{q})$

em particular $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \quad \forall \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{q})$

Se $\mathfrak{m}' \in V(\mathfrak{q})$ vem $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$. $\blacksquare$

Usamos isto para provar que $\mathfrak{q}$ é radical:

Seja $x \in R \setminus \mathfrak{q}$, então

$$(\mathfrak{q} : x) := \{ y \in R \mid yx \in \mathfrak{q} \}$$

$\subset R$ é um ideal

t.q. $\mathfrak{q} \subset (\mathfrak{q} : x) \subsetneq R$, logo $\exists$ $\mathfrak{m}'$ maximal t.q. $(\mathfrak{q} : x) \subset \mathfrak{m}'$

logo $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$ (pelo que provámos acima)

$\therefore$ $xy \in \mathfrak{q} \iff y \in (\mathfrak{q} : x) \subset \sqrt{\mathfrak{q}}$

logo $\exists n : y^n \in \mathfrak{q}$.

$\square$

Teorema: Seja R Noetheriano e $\mathfrak{q} \subset R$ um ideal, então

$$\forall_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \quad \mathfrak{q} \ \mathfrak{p}\text{-primário} \iff \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{p}\}$$

Dem: $\boxed{\Longrightarrow}$ Temos

$$\text{divisores.zero}\,(R/\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}$$

logo

$$\forall_{x \in R/\mathfrak{q} - 0} \quad \mathfrak{q} \subset \operatorname{Ann}(x) \subset \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$$

$$\therefore \ \forall_{x \in R/\mathfrak{q} - 0} \quad \sqrt{\operatorname{Ann}(x)} = \mathfrak{p}$$

$$\therefore \ \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{p}\}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponhamos $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{p}\}$

<u>A provar</u>: Nestes condições

$$\forall_{\substack{M \subset R/\mathfrak{q} \\ \text{submódulo} \neq 0}} \qquad \sqrt{\mathrm{Ann}\, M} = \mathfrak{p}$$

Temos

$$\sqrt{\mathrm{Ann}\, M} = \bigcap_{\mathfrak{p}' \in V(\mathrm{Ann}\, M)} \mathfrak{p}' = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}'_i$$

onde $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_r$ são os primos minimais de $\mathrm{Ann}\, M$

$\mathfrak{p}'_i$ minimal $\Rightarrow \mathfrak{p}'_i \in \mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{q})$
$= \{\mathfrak{p}\}$

$$\therefore \sqrt{\mathrm{Ann}\, M} = \mathfrak{p}$$

Sejam $x, y \in R$ tq. $xy \in \mathfrak{q}$ e $x \notin \mathfrak{q}$.

Temos

$$y \in \mathrm{Ann}\Big(\underset{R/\mathfrak{q}}{\underset{\cap}{\kappa(x)}}\Big) \subset \sqrt{\mathrm{Ann}(\kappa(x))} = \mathfrak{p}$$

$\therefore \ \exists n : y^n \in \mathfrak{q}$

$\therefore \ \mathfrak{q}$ é $\mathfrak{p}$-primério.

$\square$

Decomposição Primária:

Def: $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal. Uma decomposição primária de $\mathfrak{a}$ é uma expressão

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$$

com $\mathfrak{q}_i$ ideais primários. Uma decomposição primária diz-se de comprimento mínimo se

i. $\forall_j \ \mathfrak{a} \subsetneq \bigcap_{i=j} \mathfrak{q}_i$

ii. $\mathfrak{q}_i$ é $\mathfrak{p}_i$-primário com $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ para $i \neq j$

<u>Exemplo</u>: Em $\mathbb{Z}$

$$\mathfrak{a} = \langle n \rangle = \langle p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} \rangle$$

com $p_i \neq p_j$ $(i \neq j)$ primos

$$\Rightarrow \mathfrak{a} = \langle p_1^{n_1} \rangle \cap \cdots \cap \langle p_r^{n_r} \rangle$$

é uma decomposição primária de comprimento mínimo.

<u>Exercício</u>: $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ $\mathfrak{P}$-primários

$$\Rightarrow \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \text{ é } \mathfrak{P}\text{-primário}$$

Teorema: Se R é Noetheriano, todo o ideal $\mathfrak{a} \subset R$ tem uma *decomposição primária*.

Def: Um ideal $\mathfrak{a} \subset R$ diz-se indecomponível se

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$$

Exemplo: $\mathfrak{p}$ primo $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}$ indecomponível.

Dem (do Teorema):

1. Mostramos que R Noetheriano

$\Rightarrow$

$\forall_{\mathfrak{a} \subset R \text{ ideal}}$ $\quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n \quad \mathfrak{a}_i$ indecomp.

Por indução Noetheriana.

2. R Noetheriano $\Longrightarrow$ todo o ideal indecomponível é primário.

Usamos: $\boxed{\text{Facto: se } R' \text{ Noetheriano então } \langle 0 \rangle \subset R' \text{ indecomp.} \Rightarrow \langle 0 \rangle \text{ primário}}$

<u>Admitindo este facto</u>: $\mathfrak{a} \subset R$ indecomp.

$\Leftrightarrow \quad \langle 0 \rangle \subset R/\mathfrak{a}$ indecomponível

e $\mathfrak{a}$ primário $\Longleftrightarrow \langle 0 \rangle \subset R/\mathfrak{a}$ é primário

Reduzimos o problema a provar: num anel Noetheriano R'

$$\langle 0 \rangle \text{ indecomponível} \Rightarrow \langle 0 \rangle \text{ primário}$$

<u>Dem.</u>: Assumimos $\langle 0 \rangle$ indecomponível.

$$xy = 0 \iff x \in \mathrm{Ann}(y)$$

$$\mathrm{Ann}(y) \subset \mathrm{Ann}(y^2) \subset \dots \subset \mathrm{Ann}(y^n) \subset \dots$$

é cadeia ascendente de ideais, logo $\exists n$:

$\mathrm{Ann}(y^n) = \mathrm{Ann}(y^{n+1})$

Consideremos $\langle x \rangle \cap \langle y^n \rangle$.

Seja $a \in \langle x \rangle \cap \langle y^n \rangle$. Temos

$$ay = 0 \ \wedge \ a = by^n \text{ com } b \in R$$

$$\Rightarrow ay = by^{n+1} \Rightarrow b \in \mathrm{Ann}(y^{n+1})$$
$$= \mathrm{Ann}(y^n)$$

$$\Rightarrow a = by^n = 0$$

$$\therefore \langle x \rangle \cap \langle y^n \rangle = \langle 0 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = 0 \vee \langle y^n \rangle = 0$$

$\langle 0 \rangle$ indecomponível

$\therefore \langle 0 \rangle$ é primário

$\boxtimes$

$\boxtimes$

<u>Teorema de Unicidade</u>: Se R Noetheriano $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal com decomposição primária de comp. mínimo $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1} \mathfrak{q}_i$, com $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$-primário. Então

$$\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$$

<u>Dem</u>: $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i \Rightarrow$

$$R/\mathfrak{a} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} R/\mathfrak{q}_i$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a}) \subset \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{q}_i)$$

$$= \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$$

Por def. de decomp. de comp. mínimo

$$\forall_j \quad \langle 0\rangle \neq \underbrace{\left(\bigcap_{i\neq j} \mathfrak{q}_i\right)/\mathfrak{a}}_{N} \subset R/\mathfrak{a}$$

$$\Rightarrow N \hookrightarrow R/\mathfrak{q}_j$$

$$\Rightarrow \underset{\underset{\emptyset}{\not\parallel}}{\operatorname{Ass} N} \subset \underset{= \{\mathfrak{p}_j\}}{\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{q}_j)}$$

$$\therefore \mathfrak{p}_j \in \operatorname{Ass}(N) \subset \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{a})$$

$\boxed{\mathfrak{B}}$

NB: Numa decomp. de comp. mínima os radicais dos ideais primários envolvidos são determinados pelo ideal.

Exemplo: $\mathfrak{a} = \langle x^2, xy \rangle$

$= \langle x \rangle \cap \underline{\langle x, y \rangle^2}$

é decomposição primária de comprimento mínimo

Esta decomposição não é única:

$$\mathfrak{a} = \langle x \rangle \cap \overbrace{\langle x^2, x-y \rangle}$$

$$\sqrt{\langle x^2, x-y \rangle}$$

$= \langle x, y \rangle$ é maximal

$\therefore \langle x^2, x-y\rangle$ é $\langle x, y\rangle$
primário

são 2 decomp. mínimas distintas
mas os primos são os mesmos.

<u>Teorema</u>: (2º de Unicidade) Se $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i$ é uma decomposição primária com $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Seja $\mathfrak{p}_i \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ um elemento minimal. Então

$$\mathfrak{q}_i = \varphi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{a})$$

com $S = R - \mathfrak{p}_i$. Em particular, $\mathfrak{q}_i$ é determinado por $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{p}_i$.